

EGZAMIN ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI – CZĘŚĆ TESTOWA
ODPOWIEDZI WRAZ Z KRÓTKIMI UZASADNIENIAMI

01.02.2024

Punktacja: 0.5 pkt za poprawną odpowiedź na każdy podpunkt + bonus 0.5 pkt za wszystkie trzy poprawne odpowiedzi w zadaniu. Prosimy o udzielenie odpowiedzi na załączonym arkuszu odpowiedzi.

Zadanie 1. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą zbiorami takimi, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ oraz dla każdych $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ zachodzi $|A_i \cap A_j| = \min\{i, j\}$. Oblicz

a) $|\mathcal{P}(A_4)|$,

16. Mamy $|A_4| = |A_4 \cap A_4| = 4$, więc $|\mathcal{P}(A_4)| = 2^4 = 16$.

b) $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$,

1. Zauważmy, że $|A_1| = |A_1 \cap A_1| = 1$ oraz podobnie $|A_2| = 2$, $|A_3| = 3$, $|A_4| = 4$. Skoro $|A_1 \cap A_2| = 1$, to $A_1 \cap A_2 = A_1$. Podobnie $A_1 \cap A_3 = A_1$ oraz $A_4 \cap A_1 = A_1$. A zatem $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_1$.

c) moc zbioru wszystkich funkcji ze zbioru A_2 w zbiór A_3 .

9. Wiemy już, że $|A_2| = 2$ i $|A_3| = 3$, zatem $|A_3^{A_2}| = 3^2 = 9$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb całkowitych. Czy wówczas

a) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, k] \cap \mathbb{Z}\right)$?

Nie. $\bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, k] \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, zatem $\mathcal{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, k] \cap \mathbb{Z}\right) = \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \supsetneq \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$.

b) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}([-k, k] \cap \mathbb{Z})$?

Tak. Podzbiór $A \subseteq \mathbb{Z}$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony, tj. zawiera się w zbiorze $[-k, k] \cap \mathbb{Z}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy należy do prawej strony badanej równości.

$$c) \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z}) = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}((-\infty, k] \cap \mathbb{Z}) \right) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}([-k, +\infty) \cap \mathbb{Z}) \right) ?$$

Tak. Podzbiór $A \subseteq \mathbb{Z}$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z góry i ograniczony z dołu, tj. zawiera się w zbiorze $(-\infty, k] \cap \mathbb{Z}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz w zbiorze $[-k, \infty)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy należy do prawej strony badanej równości.

Zadanie 3. Niech $F = \{\langle \mathcal{A}, \langle \bigcap \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{A} \rangle \rangle : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{A} \neq \emptyset\}$. Czy zbiór F jest

a) podzbiorem zbioru $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Tak, dla $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{A} \neq \emptyset$ mamy $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ oraz $\bigcap \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zatem $\langle \bigcap \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{A} \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, i $\langle \mathcal{A}, \langle \bigcap \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{A} \rangle \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

b) funkcją ze zbioru $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ w zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Nie. Chociaż łatwo sprawdzić, że jest to funkcja ze zbioru $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \setminus \{\emptyset\}$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, to $\emptyset \notin D_F$, zatem nie jest to funkcja ze zbioru $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ w zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

c) funkcją różnowartościową?

Nie. Mamy na przykład $F(\{\{0\}, \{1, 2\}\}) = \langle \emptyset, \{0, 1, 2\} \rangle = F(\{\{0, 1\}, \{2\}\})$.

Zadanie 4. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = e^x$. Czy rodzina

$$\{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}\}$$

jest

a) jednoelementowa?

Nie. Niech $h: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Wtedy funkcja $g_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$g_h(y) = \begin{cases} h(y) & , \text{ gdy } y \leq 0 \\ \ln y, \text{ wpp.} \end{cases}$$

spełnia warunek $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Oczywiście $|\mathbb{R}^{(-\infty, 0]}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{R}}| > \mathfrak{c}$ oraz funkcja $F: \mathbb{R}^{(-\infty, 0]} \rightarrow \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}\}$ zadana wzorem $F(h) = g_h$ jest różnowartościowa. Zatem badany zbiór również ma moc większą niż continuum.

b) mocy continuum?

Nie. Patrz wyżej.

c) mocy większej niż continuum?

Tak. Patrz wyżej.

Zadanie 5. Czy dla dowolnego zbioru X , dowolnej funkcji $f: X \rightarrow X$ i dowolnych zbiorów $A, B, C \subseteq X$

a) $f[(A \cup B) \setminus C] = (f[A] \cup f[B]) \setminus f[C]$?

Nie. Np. niech $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ będzie funkcją stałe równą 0 oraz niech $A = \{0\}$, $B = \emptyset$, $C = \{1\}$. Wtedy $(A \cup B) \setminus C = \{0\}$, $f[(A \cup B) \setminus C] = \{0\}$, $f[A] = \{0\}$, $f[B] = \emptyset$, $f[C] = \{0\}$, $(f[A] \cup f[B]) \setminus f[C] = \emptyset$.

b) $f[(A \cup B) \setminus C] \subseteq (f[A] \cup f[B]) \setminus f[C]$?

Nie. Patrz wyżej.

c) $f^{-1}[(A \cup B) \setminus C] = (f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]) \setminus f^{-1}[C]$?

Tak. Na mocy twierdzeń z wykładu operacje na zbiorach zachowują przeciwobraz w dowolnej funkcji.

Zadanie 6. Niech $A = \{r \in \mathbb{R} : r^2 \in \mathbb{Q}\}$. Rozstrzygnij dla każdego z następujących zbiorów, czy jest przeliczalny, mocy continuum, czy mocy większej niż continuum.

a) zbiór potęgowy zbioru wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach w zbiorze A .

> c. Rzeczywiście $|A| = |\mathbb{N}|$, bowiem funkcja $F: \mathbb{Q} \rightarrow A$ zdefiniowana wzorem

$$F(q) = \begin{cases} \sqrt{q} & , \text{ dla } q \geq 0 \\ -\sqrt{-q} & , \text{ wpp.} \end{cases}$$

jest bijekcją oraz $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. W takim razie $|A^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$ oraz $|\mathcal{P}(A^{\mathbb{N}})| > \mathfrak{c}$.

b) zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zbieżnych do 0 o wyrazach w zbiorze A .

c. Zauważmy, podobnie jak wyżej, że $|A \cap [0, 1]| = |\mathbb{N}|$. Mamy zatem $|(A \cap [0, 1])^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Funkcja F prowadząca ze zbioru $(A \cap [0, 1])^{\mathbb{N}}$ w zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zbieżnych do 0 o wyrazach w zbiorze A zdefiniowana tak, że $F(\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}) = \langle x_n / 2^n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest różnowartościowa.

c) zbiór potęgowy zbioru wszystkich nieskończonych stałych ciągów o wyrazach w zbiorze A .

c. Oczywiście zbiór wszystkich nieskończonych stałych ciągów o wyrazach w zbiorze A jest równoliczny z A , a zatem jego zbiór potęgowy jest równoliczny z $\mathcal{P}(A)$ oraz $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

Zadanie 7. Dla $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ oraz $m \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A},m} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq 2024 \wedge \exists_{A \in \mathcal{A}} \forall_{k \in A} f(k) \leq m\}.$$

Rozstrzygnij, czy zbiór $\mathcal{B}_{\mathcal{A},m}$ jest skończony, przeliczalny, czy nieprzeliczalny dla:

a) $\mathcal{A} = \{\{k \in \mathbb{N} : k \geq j\} : j \in \mathbb{N} \wedge j \leq 2024\}$, $m = 0$,

Skończony. Zauważmy, że jeśli $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{A},m}$, to dla pewnego $j \leq 2024$, i dla każdego $k \geq j$, $f(k) = 0$. Zatem dla każdego $k \geq 2024$, $f(k) = 0$. Skoro ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f(n) \leq 2024$, mamy $|\mathcal{B}_{\mathcal{A},m}| \leq 2024^{2024}$ – jest skończony.

b) $\mathcal{A} = \{\{k \in \mathbb{N} : k \geq 2024\}\}$, $m = 1$,

Nieprzeliczalny. Zauważmy, że $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{A},m}$.

c) $\mathcal{A} = \{\{k \in \mathbb{N} : k \geq j\} : j \in \mathbb{N} \wedge j \geq 2024\}$, $m = 0$.

Przeliczalny. Zauważmy, że jeśli $f \in \mathcal{B}_{\mathcal{A},m}$, to istnieje $j \in \mathbb{N}$, że dla każdego $k \geq j$, $f(k) = 0$. Zatem moc zbioru $\mathcal{B}_{\mathcal{A},m}$ jest nie większa niż moc zbioru wszystkich skończonych ciągach o wyrazach w zbiorze $\{0, \dots, 2024\}$, a więc co najwyżej przeliczalna. Ale dla każdego $k \in \mathbb{N}$ ciąg f_k zdefiniowany jako

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } n < k \\ 0 & , \text{ wpp} \end{cases}$$

jest elementem $\mathcal{B}_{\mathcal{A},m}$, czyli jest to zbiór nieskończony, a zatem przeliczalny.

Zadanie 8. Dla relacji równoważności r na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujmy $F_r : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wzorem

$$F_r(A) = \bigcup [A]_r \quad \text{dla } A \subseteq \mathbb{N}.$$

a) Czy istnieje taka relacja równoważności r na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, że F_r jest funkcją na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Tak, jeśli r jest relacją równości na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, to dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $[A]_r = \{A\}$ oraz $F_r(A) = \bigcup \{A\} = A$ jest wobec tego funkcją „na”.

b) Czy dla każdej relacji równoważności r na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, F_r jest funkcją na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Nie. Jeśli r jest relacją pełną, czyli $r = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, to dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mamy $[A]_r = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, zatem $F_r(A) = \bigcup \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. W takim razie w tym przypadku $R_{F_r} = \{\mathbb{N}\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

c) Jaka jest moc zbioru wszystkich relacji równoważności r na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, że F_r jest funkcją różnowartościową?

1. Jedynie relacja równości ma tę cechę. Rzeczywiście, załóżmy, że r jest taka, że F_r jest funkcją różnowartościową. Załóżmy też, że $\langle A, B \rangle \in r$ dla pewnych $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wtedy $[A]_r = [B]_r$, a zatem $F_r(A) = F_r(B)$, czyli $A = B$.

Zadanie 9. Niech $\simeq$ będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ zdefiniowaną następująco

$$f \simeq g \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} |f(n)| = |g(n)| \quad \text{dla } f, g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},$$

gdzie $|x|$ oznacza wartość bezwzględną z liczby x . Czy prawdą jest, że:

- a) jeśli $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ jest ciągiem, dla którego istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > m$ zachodzi $f(n) = 0$, to $|[f]_{\simeq}| \leq |\mathbb{N}|$?

Tak. Jeśli $g \in [f]_{\simeq}$, czyli $g \simeq f$ to dla każdego $n > m$, $|g(n)| = |f(n)| = 0$, czyli $g(n) = 0$ dla $n > m$. Ciągów spełniających ten warunek jest przeliczalnie wiele, więc badana klasa abstrakcji jest co najwyżej przeliczalna.

- b) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, że $|[f]_{\simeq}| = 2^k$?

Tak. Niech $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zdefiniowany jako

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } n < k \\ 0 & , \text{ wpp} \end{cases}$$

Wtedy klasa abstrakcji $[f]_{\simeq}$ jest zbiorem wszystkich ciągów g takich, że dla $n < k$ $g(n) \in \{-1, 1\}$ oraz dla $n \geq k$, $g(n) = 0$. Ciągów takich jest 2^k .

- c) $|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \simeq| = |\mathbb{R}|$?

Tak. Oczywiście $|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \simeq| \leq |\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Z drugiej strony funkcja $F: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \simeq$, taka, że $F(f) = [f]_{\simeq}$ jest różnowartościowa, więc $|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \simeq| \geq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Zadanie 10. Niech $\sqsubseteq$ będzie najmniejszą (w sensie zawierania) relacją częściowo porządkującą zbiór $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, zawierającą zbiór

$$\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle\}.$$

Czy prawdą jest, że:

- a) elementy 0 i 5 są nieporównywalne w relacji $\sqsubseteq$?

Nie. Mamy $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq 5$.

- b) w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ istnieje element największy?

Tak. Tym elementem jest 5. Rzeczywiście $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq 5$, więc $0, 1, 3 \sqsubseteq 5$ oraz $2 \sqsubseteq 4 \sqsubseteq 5$, więc $2, 4 \sqsubseteq 5$.

- c) każdy zbiór $A \subseteq X$ ma w tym porządku kres górny?

Nie. Kontrprzykład stanowi zbiór $\{1, 2\}$. Zbiór jego ograniczeń górnych to $\{3, 4, 5\}$. Nie ma on jednak elementu najmniejszego, bowiem $3 \sqsubseteq 5$ oraz $4 \sqsubseteq 5$, ale 3 i 4 są nieporównywalne w porządku $\sqsubseteq$.

Zadanie 11. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie niepustym zbiorem liniowo uporządkowanym, w którym każdy właściwy odcinek początkowy ma kres górny. Czy wynika stąd, że porządek $\leq$ zbioru X jest

a) gęsty?

Nie. Zbiór $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ spełnia warunki postawione w zadaniu, a nie jest gęsty.

b) zupełny?

Tak. Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem ograniczonym z góry w porządku $\langle X, \leq \rangle$ spełniającym warunki zadania. Wtedy $O = \{x \in X : \exists a \in A x \leq a\}$ jest właściwym odcinkiem początkowym. Niech $m = \sup O$. Skoro $A \subseteq O$, m jest ograniczeniem górnym zbioru A . Załóżmy, że $n \leq m$ jest też ograniczeniem górnym A . Wtedy dla $x \in O$, istnieje $a \in A$, że $x \leq a$, ale $a \leq n$, zatem $x \leq n$ i dostajemy, że n jest ograniczeniem O , a zatem $n = m$. Wobec tego m jest kresem górnym zbioru A . Zatem badany porządek jest zupełny.

c) dobry?

Nie. Zbiór $[0, +\infty)$ ze standardowym porządkiem spełnia warunki postawione w zadaniu, a porządek ten nie jest dobry.

Zadanie 12. Rodzinę $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ nazywamy ciekawą, jeśli $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{R}$, ale dla każdych $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ zachodzi $A_1 \cup A_2 \neq \mathbb{R}$. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem wszystkich ciekawych rodzin. Czy prawdą jest, że

a) $\{\{r\} : r \in \mathbb{R}\}$ jest ciekawą rodziną, która jest minimalnym elementem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{X}, \subseteq \rangle$?

Tak, oczywiście $A = \{\{r\} : r \in \mathbb{R}\}$ jest ciekawą rodziną. Jeśli $\mathcal{U} \subseteq A$ jest ciekawą rodziną, to $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{R}$, więc dla każdego $r \in \mathbb{R}$ istnieje $X \in \mathcal{U}$, że $r \in X$. A zatem dla każdego $r \in \mathbb{R}$, $\{r\} \in \mathcal{U}$, czyli $\mathcal{U} = A$.

b) zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathcal{X}, \subseteq \rangle$ jest izomorficzny ze zbiorem $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$?

Nie. W zbiorze $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$ istnieje element najmniejszy, czyli $\emptyset$. W zbiorze $\langle \mathcal{X}, \subseteq \rangle$ taki element nie istnieje. Rzeczywiście $\{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}$ jest przykładem elementu minimalnego, który jest inny niż ten wskazany w poprzednim podpunkcie.

c) w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{X}, \subseteq \rangle$ istnieje element maksymalny?

Tak. W porządku tym każdy łańcuch ma ograniczenie górny. Rzeczywiście, jeśli $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ jest łańcuchem, to $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{X}$, bowiem oczywiście $\bigcup \bigcup \mathcal{L} = \mathbb{R}$ oraz jeśli $X_1, X_2 \in \bigcup \mathcal{L}$, to $X_1 \in \mathcal{U}_1 \in \mathcal{L}$ oraz $X_2 \in \mathcal{U}_2 \in \mathcal{L}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, zatem $X_1, X_2 \in \mathcal{U}_2$, czyli $X_1 \cup X_2 \neq \mathbb{R}$. Zatem na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w tym porządku istnieje element maksymalny.